第 39 卷 第 6 期
2022 年 12 月
应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 39 No. 6
Dec. 2022
ChinaXiv合作期刊

文章编号:1000-4939(2022)06-1140-09

基于修正的 Irvine 特征参数的大跨度悬索桥对称竖弯基频简化计算方法

周光伟,钱长照,陈昌萍

(厦门理工学院土木工程与建筑学院,福建省风灾害与风工程重点实验室,361024 厦门)

chinaXiv:202212.00121v1

摘　要:结构动力特性计算是悬索桥结构设计计算的重要内容,悬索桥基频简化计算方法为悬索桥方案选型和初步设计阶段的动力特性计算提供了快速的计算依据。依据典型 3 类悬索桥的结构特点,基于 Irvine 经典理论的小垂度水平悬索频率方程,考虑大跨悬索桥边跨的刚度影响,提出了对称竖弯基频计算的大跨悬索桥结构刚度模型和修正的 Irvine 特征参数的基频计算方法。分析结果表明:由于考虑边跨刚度的影响,主跨主缆的特征参数 λ 有较大幅度的下降;对称竖弯无量纲固有基频 $\bar{\omega}$ 随特征参数 λ 的增大而单调增大;大跨度悬索桥对称竖弯基频随着边跨刚度的下降而减小。基于典型的 3 类悬索桥对公路桥梁抗风设计规范对称竖弯振动基频公式评估可以看出:规范公式对于双跨和三跨悬索桥,无论边跨为对称还是非对称结构,误差较大,基频误差均超过 10%;采用本研究方法计算精度较高,与有限元计算结果的误差均小于 5%,能够满足工程应用的计算精度要求。由于本研究算例涵盖了典型的三类悬索桥,表明了本研究方法对于对称竖弯基频计算具有一定的通用性。

关键词:桥梁工程;大跨悬索桥;特征参数;基频;计算方法

中图分类号:U448.25　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2022.06.015

A simplified method for symmetric vertical fundamental frequency of long-span suspension bridges based on modified Irvine characteristic parameters

ZHOU Guangwei, QIAN Changzhao, CHEN Changping

(School of Civil Engineering and Architecture, Xiamen University of Technology; Fujian Provincial Key Laboratory of Wind Disaster and Wind Engineering, 361024 Xiamen, China)

Abstract: The calculation of structural dynamic characteristics is an important content in structural design of suspension bridges. The simplified method of calculating the fundamental frequency of suspension bridge provides a fast calculation basis for the selection of suspension bridge schemes and the calculation of dynamic characteristics in the preliminary design stage. Based on the structural characteristics of three types

收稿日期:2021-12-17　　**修回日期**:2022-03-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 52178510);国家重点研发计划资助项目(No. 2017YFC0806000);福建省科技计划资助项目(No. 2021Y0042)

通信作者:周光伟,副教授。E-mail:zhougw13@163.com

引用格式:周光伟,钱长照,陈昌萍. 基于修正的 Irvine 特征参数的大跨度悬索桥对称竖弯基频简化计算方法[J]. 应用力学学报,2022,39(6):1140-1148.

ZHOU Guangwei, QIAN Changzhao, CHEN Changping. A simplified method for symmetric vertical fundamental frequency of long-span suspension bridges based on modified Irvine characteristic parameters[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(6): 1140-1148.

ChinaXiv合作期刊

of suspension bridges and the frequency equation of small SAG horizontal suspension based on Irvine classical theory, and considering the stiffness effect of the side-span, the stiffness model of long span suspension bridge with symmetric vertical bending and a simplified method for calculating the fundamental frequency are presented. The analysis results show that the characteristic parameter λ of the main span has a relatively large decrease due to the stiffness effect of the side-span; the dimensionless fundamental frequency $\bar{\omega}$ of the symmetrical vertical bending increases monotonically with the increase of the characteristic parameters; the fundamental frequency of symmetric vertical bending of long-span suspension bridges decreases with the decrease in stiffness of side-span. Based on the evaluation of the fundamental frequency formula of symmetric vertical bending vibration for the wind-resistant design code of highway bridges for three types of suspension bridges, it can be seen that for double-span suspension bridges and three-span suspension bridges, whether the side span is symmetrical or asymmetrical, the fundamental frequency error is more than 10%. The method presented in this paper has higher precision; the error between the results calculated by this method and that calculated by finite element method is less than 5%, which can meet the requirement of precision in engineering application. Since the examples in this paper cover three typical types of suspension bridges, it is shown that the method in this paper has certain generality for calculating the fundamental frequency of symmetrical vertical bending.

Key words: bridge engineering; long-span suspension bridge; characteristic parameter; fundamental frequency; calculation method

chinaXiv:202212.00121v1

悬索桥为跨越能力最强的大跨结构,结构动力特性计算是悬索桥结构设计计算的重要内容,而结构基频是反应结构抗风稳定性和地震动力响应的主要参数。在悬索桥方案选型和初步设计阶段,进行大跨径悬索桥有限元分析不仅需要较完整的结构设计参数,而且因为悬索桥主缆几何非线性的受力特点,计算过程复杂,需要耗费大量的时间和精力,而且在此阶段进行精确的有限元分析也没有必要。因此如何采用简化方法对大跨悬索桥进行基频计算,快速评估悬索桥基本动力特性,是许多研究者一直关注和研究的课题[1-6]。

索结构作为一种具有典型非线性特点的工程结构,其振动频率以及其非线性力学行为一直受到研究者们的重视并开展了一系列的研究。Irvine 和 Caughey[7]创立了小垂度拉索的振动理论,基于索的振动方程和几何变形协调条件,推导出了著名的面内振动的水平悬索频率方程,该方程在拉索振动理论中具有极其重要的地位。随后,Irvine[8]又把水平拉索振动理论推广到倾斜的小垂度斜拉索。Triantafyllou 等[9-10]根据动力拉索的空间可变性,以及平行于拉索的重量分量的影响,推导出了更为精确的解。李国强等[11]研究发现,拉索在变形协调方程中考虑二阶项时,拉索的自由振动表现出非线性特征。李立等[12]认为,对悬索桥这类索结构,本身便有着丰富的非线性动力学内容,这些动力学内容在工程实际中是否有必要考虑及如何考虑,仍有待深入探讨。谢献忠等[13]基于 Hamilton 变分原理,建立了多档输电线结构的精细化动力学模型,分析了垂跨比、跨度比等参数对面内固有频率的影响。李专干等[14]采用连续体系统动力学分析方法,建立了各斜拉索及各梁段的动力学偏微分方程,推导了斜拉桥的频率方程。肖恩源[15-16]在 Irvine 的研究基础上,结合中国悬索桥大量工程实例,对悬索桥的刚度特性、静力计算以及相关设计问题等进行了深入研究,其研究成果即使对于悬索桥动力计算也具有重要参考意义。

对于中跨简支的双塔悬索桥,中国桥梁抗风设计规范[17]给出了结构基频的简化估算公式,一些学者对于其他悬索桥的基频计算也进行了初步的探讨和研究。盛善定等[18]基于中国早期两座大跨悬索桥,应用能量法研究了悬索桥的基频估算公式,其推导出的公式与现行中国桥梁抗风设计规范的基频估算公式一致。Larsen 等[19]在不考虑桥塔刚度影响的前提下,采用 Rayleigh-Ritz 法对三跨连续悬索桥的动力特性进行了研究,推导出了对称竖弯和扭转基频的估算公式。鞠小华等[20]考虑边缆和桥塔刚度的影响,运用 Rayleigh-Ritz 法对悬索桥一阶竖向挠曲振动频率的近似计算公式进行了修正。谢官模

ChinaXiv合作期刊
chinaXiv:202212.00122v1

等[21]基于 Rayleigh 法推导了单跨悬索桥竖向振动基频的实用近似计算公式,将近似计算公式计算结果与精确的有限元计算结果比较,误差较大。杨国俊等[22]对于大跨度非对称悬索桥振动基频公式进行了研究,采用 Rayleigh 法分别推导了一阶正对称、反对称竖弯及扭转振动基频估算公式,并讨论了公式的通用性。除了常规的双塔悬索桥,一些学者对于多塔悬索桥的结构动力特性也进行了一定的研究。焦常科等[23]基于 3 塔悬索桥采用 Lanczos 算法分析了该桥的动力特性。王本劲等[24]提出了考虑中塔刚度影响的 3 塔或多塔悬索桥的振动基频估算公式。张超[25]和郭俊等[26]基于能量原理,分别研究了 3 塔和独塔自锚式悬索桥一阶竖弯振动频率的简化计算公式。

综上所述,上述研究对象为单跨悬索桥、多塔悬索桥以及非对称的三跨悬索桥,主要采用了基于能量原理的分析方法。由于上述方法引入了一些基本假定,计算模型进行了一定的简化,对于悬索桥的对称竖弯振动频率,往往导致基频估算精度不高的结果[20-21]。本研究采用 Irvine 经典拉索振动理论,基于修正的 Irvine 特征参数 λ,研究 3 类典型大跨度悬索桥对称竖弯振动基频统一的简化计算方法,并且提高对称竖弯基频的计算精度。

1 Irvine 水平悬索频率方程

对于如图 1 所示的两端约束水平悬挂的等截面均匀悬索。

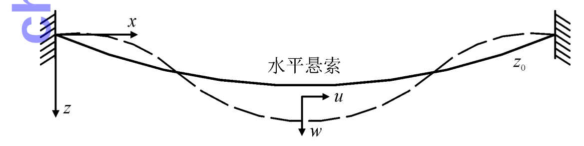


图 1 水平悬索面内振动图示

Fig. 1 In-plane vibration of horizontal suspension cable

只考虑索的轴向刚度,在小垂度并忽略高阶小项及纵向运动的假定条件下,可得到索的面内线性运动方程为

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-H_g\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-h\frac{d^2 z_0}{dx^2}=0 \tag{1}$$

式中:m 为悬索单位长度质量;w 为面内竖向的运动位移;H_g 为悬索自重构形拉力的水平分量;h 为悬索振动引起的水平分力增量;z_0 为悬索在恒载作用下静止时在 z 方向产生的垂度方程。根据假定面内水平振动位移 u 为零(即 $u=0$),忽略悬索竖向位移的高阶小项,悬索的变形协调方程为

$$\frac{hL_E}{EA}dx = \int_0^l \frac{dz_0}{dx}\times\frac{\partial w}{\partial x}dx ,$$

$$L_E = \int_S \frac{dx}{\cos^3\alpha} \tag{2}$$

式中:α 为悬索的水平倾角;E 为主缆的弹性模量;A 为主缆的截面积。

对于面内对称竖弯振动模态,由式(1)和式(2)可以求解得到水平悬索频率方程[7]为

$$\tan\frac{\bar{\omega}}{2}=\frac{\bar{\omega}}{2}-\frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right)^3 ,$$

$$\bar{\omega}=\omega L\sqrt{m/H_g},\quad \lambda^2=\frac{EA}{H_g}\cdot\frac{L}{L_E}\cdot\left(\frac{qL}{H_g}\right)^2 \tag{3}$$

式中:$\bar{\omega}$ 为无量纲固有频率;ω 为水平悬索对称竖弯固有频率;λ 为 Irvine 特征参数。式(3)即为 Irvine 水平悬索面内对称竖弯频率方程,在拉索振动理论中具有极其重要的地位。面内对称模态的固有频率由独立参数 λ 唯一确定,这也说明了 λ 作为拉索系统固有特征的重要性。

悬索桥主缆在恒载作用下一般近似为二次抛物线,对于二次抛物线水平索,则有

$$L_E = \int_S \frac{dx}{\cos^3\alpha} = \int_0^l\left[1+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2\right]^{3/2}dx \approx L\xi ,$$

$$\xi = 1+8\left(\frac{f}{L}\right)^2 \tag{4}$$

大跨度悬索桥垂跨比 f/L 一般都在 1/10 左右,由式(4)可知,中跨主缆 ξ 可近似取 1.08。

2 主跨、边跨的弹性刚度和重力刚度

对于大跨度悬索桥主缆,与张紧索的最大区别是几何非线性的影响。主缆除了索本身的弹性刚度外,由于主缆在恒载作用下产生一定的垂度,同时主缆在使用阶段一直保持强大的恒载水平力,因此还存在重力刚度。弹性刚度与重力刚度二者为串联的关系,主缆水平轴向刚度串联模型如图 2 所示。

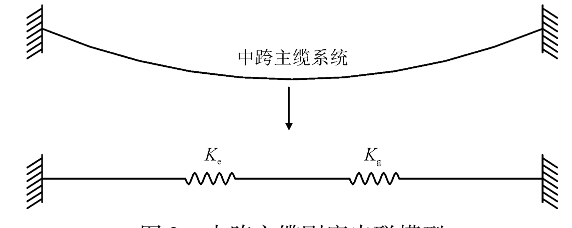


图 2 中跨主缆刚度串联模型

Fig. 2 Stiffness series model of main cable

1)中跨水平主缆的弹性刚度

ChinaXiv合作期刊
chinaXiv:202212.00121v1

不考虑主缆几何形状的变化，主缆由于本身弹性变形引起力的变化称为弹性刚度。为了推导主缆的弹性刚度，选择主缆中任一微段进行分析，该微段初始位置为 AB，因振动变形以后最终位置为 AC，该微段初始长度为 $\mathrm{d}s_0$，变形后的长度为 $\mathrm{d}s$，在水平力增量 h 作用下水平位移为 $\Delta \mathrm{d}x$，其水平力增量 h 与水平位移变化 ΔL 的关系如图 3 所示，根据力与变形的关系，有

$$\Delta L = \int_S \Delta \mathrm{d}x = \int_S \frac{\Delta \mathrm{d}s}{\cos\alpha} = \frac{h}{EA}\int_S \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3\alpha} = \frac{hL_E}{EA} \tag{5}$$

由式(5)变形可得

$$h = \frac{EA}{L_E}\Delta L \tag{6}$$

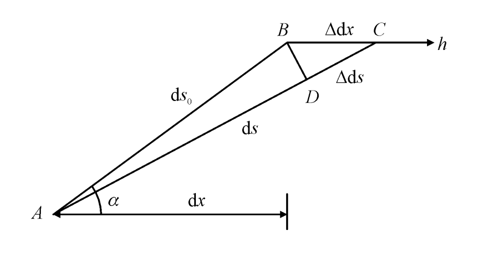


图 3　主缆弹性刚度变形示意

Fig. 3　Elastic stiffness deformation of main cable

根据式(6)水平力增量 h 与水平位移 ΔL 的关系，则主跨弹性刚度 K_e 为

$$K_e = \frac{EA}{L_E} \tag{7}$$

2）中跨水平主缆的重力刚度

不考虑主缆的物理弹性变形，由于主缆重心位置的变化引起主缆水平力增量称为重力刚度。假定水平主缆在恒载作用下为二次抛物线，主跨长为 L，垂度为 f，索在外力 h 作用下，主缆向外位移为 ΔL，左右支点各为 $\Delta L/2$。为了只研究重力刚度，假定主缆弹性刚度无穷大，位移前后主缆长度 s 不变，即主缆水平位移 ΔL 仅由主缆几何形状的变化所引起。其水平力增量 h 与水平位移 ΔL 的关系如图 4 所示。

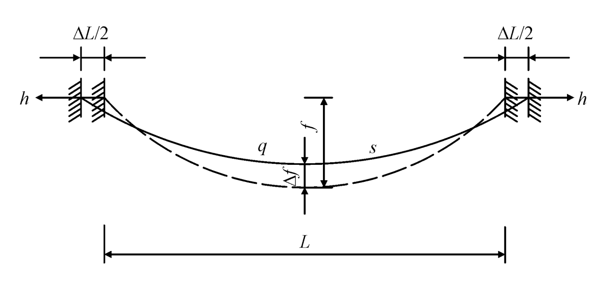


图 4　主缆重力刚度变形示意

Fig. 4　Gravitational stiffness deformation of main cable

根据小垂度悬索索长计算公式并按级数展开的形式为

$$s = L\left(1 + \frac{8f^2}{3L^2} - \frac{32f^4}{5L^4} + \cdots\right) \tag{8}$$

基于悬索小垂度假定，索长取前面两项也具有足够的精度，即

$$s \approx L\left(1 + \frac{8f^2}{3L^2}\right) \tag{9}$$

函数 s 对变量 f 求导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}f} = \frac{16}{3}\frac{f}{L} \tag{10}$$

则可以得到 Δf 与 Δs 的变化关系为

$$\Delta s = \frac{16}{3}\left(\frac{f}{L}\right)\Delta f \tag{11}$$

函数 s 对变量 L 求导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}L} = 1 - \frac{8}{3}\left(\frac{f}{L}\right)^2 \tag{12}$$

基于悬索小垂度假定，则可以得到 Δs 与 ΔL 的变化关系为

$$\Delta s = \left[1 - \frac{8}{3}\left(\frac{f}{L}\right)^2\right]\Delta L \approx \Delta L \tag{13}$$

由于假定位移前后主缆长度 s 不变，由图 4 可知，主缆水平位移 ΔL 是由于 Δf 变化引起 Δs 变化的结果，因此可以得到

$$\Delta L = -\frac{16}{3}\left(\frac{f}{L}\right)\Delta f \tag{14}$$

悬索在恒载作用下，其恒载拉力的水平分量为 H_g，根据主缆力的平衡方程有

$$H_g = \frac{qL^2}{8f} \tag{15}$$

函数 H_g 对变量 f 求导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}H_g}{\mathrm{d}f} = -\frac{q}{8}\left(\frac{L}{f}\right)^2 \tag{16}$$

则可以得到水平力增量 h 与 Δf 的变化关系为

$$h = -\frac{q}{8}\left(\frac{L}{f}\right)^2\Delta f \tag{17}$$

由式(14)和式(17)，可以得到 h 与 ΔL 的变化关系为

$$h = \frac{12H_g}{L\left(\frac{qL}{H_g}\right)^2}\Delta L \tag{18}$$

根据水平力增量 h 与水平位移 ΔL 的关系，重力刚度 K_g 的表达式为

$$K_g = \frac{12H_g}{L\left(\frac{qL}{H_g}\right)^2} \tag{19}$$

ChinaXiv合作期刊
chinaXiv:202212.00121v1

式中:L 为悬索桥主跨跨径;q 为单侧主缆、吊杆以及桥面系一半的自重。

3)边跨倾斜主缆的弹性刚度和重力刚度

对于边跨倾斜主缆,其水平力增量 ΔH 与水平位移 Δx 的关系如图 5 所示。图中:α_0 为边跨为倾斜主缆水平倾角;l 为边跨的跨径;a 为主塔高度;E_pI 为主塔抗弯刚度,E_p 为主塔弹性模量,I 为主塔截面抗弯惯性矩;q_i 为单侧主缆、吊杆以及桥面系一半的自重(如边跨没有吊杆,则 q_i 为单侧主缆的自重)。根据中跨水平主缆弹性刚度与重力刚度的推导方法,可以得到边跨倾斜主缆的弹性刚度与重力刚度。

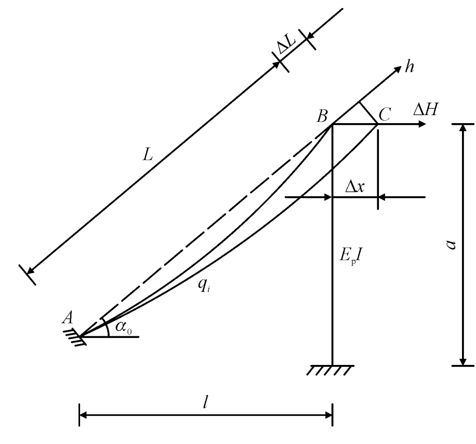


图 5　边跨倾斜主缆等效水平刚度示意

Fig. 5　Equivalent horizontal stiffness of inclined main cable

主塔塔顶的水平抗推刚度 K_p 为

$$K_p = \frac{3E_pI}{a^3} \tag{20}$$

大跨径悬索桥主塔高度较高(a 值较大),由式(20)可知,主塔水平抗推刚度与墩高的三次方成反比,故主塔的水平抗推刚度 K_p 较小。相对于边跨主缆的水平约束,主塔的水平抗推刚度可以忽略不计。文献[27]的研究结论为主塔的抗弯刚度对结构各向频率的影响很小。因此,本研究不考虑主塔水平抗推刚度对振动频率的影响。

根据倾斜索与水平索的关系有

$$h = \frac{\Delta H}{\cos\alpha_0}, L = \frac{l}{\cos\alpha_0}, \Delta L = \Delta x\cos\alpha_0, q = q_i\cos\alpha_0 \tag{21}$$

把式(21)分别代入式(6)和式(18),可得

$$\Delta H = \left(\frac{EA}{l_E}\cos^3\alpha_0\right)\Delta x \tag{22}$$

$$\Delta H = \frac{12H_g}{l\left(\dfrac{q_il}{H_g}\right)^2}\Delta x \tag{23}$$

由式(22)~(23)可以得到边跨弹性刚度 K_{ei} 和边跨重力刚度 K_{gi} 分别为

$$K_{ei} = \frac{EA}{l\xi}\cos^3\alpha_0 \tag{24}$$

$$K_{gi} = \frac{12H_g}{l\left(\dfrac{q_il}{H_g}\right)^2} \tag{25}$$

对于边跨没有吊杆的倾斜主缆,由于垂跨比很小,式(24)中的 ξ 可近似取 1.0。

4)中跨、边跨主缆的等效水平轴向刚度

由图 2 所示的水平轴向刚度串联模型可知,对于中跨的主缆等效水平轴向刚度 K_a 为

$$K_a = \frac{K_eK_g}{K_e + K_g} = \frac{\dfrac{EA}{L\xi}}{1 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{qL}{H_g}\right)^2\dfrac{EA}{\xi H_g}} \tag{26}$$

同理,边跨的等效水平轴向刚度 K_{ai} 为

$$K_{ai} = \frac{K_{ei}K_{gi}}{K_{ei} + K_{gi}} = \frac{\dfrac{EA}{l\xi}\cos^3\alpha_0}{1 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{q_il}{H_g}\right)^2\dfrac{EA}{\xi H_g}\cos^3\alpha_0} \tag{27}$$

5)Irvine 特征参数 λ 的物理意义

$$\lambda^2 = 12\frac{K_e}{K_g} = \frac{EA}{H_g}\frac{L}{L_E}\left(\frac{qL}{H_g}\right)^2 \tag{28}$$

由式(28)可知,λ 为主缆弹性刚度与重力刚度的相对比值,也即反映了大跨径悬索桥结构的力学本质特性:主缆的弹性和几何非线性特性。

当主缆为二次抛物线时,Irvine 特征参数 λ 简化为

$$\lambda^2 = 12\frac{K_e}{K_g} = \frac{EA}{H_g\xi}\left(\frac{qL}{H_g}\right)^2 \tag{29}$$

3　大跨悬索桥刚度模型及修正的 Irvine 特征参数 λ

在进行悬索桥面内对称竖弯基频简化计算时,可以采用如图 6 所示的典型结构刚度模型,该模型基于如下基本假定:主缆完全柔性,应力应变关系满足胡克定律;吊杆不伸长,加劲梁与主缆变形协调一致;不考虑主塔水平抗推刚度的影响;主缆在恒载作用下的线形为二次抛物线;不考虑加劲梁抗弯刚度的影响。

令 K_{a1}、K_{a2} 分别表示悬索桥两边跨的等效水平轴向刚度,根据主缆变形特点,则边跨的水平轴向刚度相当于减小了中跨的弹性刚度,而中跨的重力刚

ChinaXiv合作期刊

度不变。根据水平轴向刚度的串联关系，修正后的中跨等效弹性刚度为

$$K_{e0}=\frac{1}{\frac{1}{K_{a1}}+\frac{1}{K_{a2}}+\frac{1}{K_{e}}}=\frac{K_{a1}K_{a2}K_{e}}{K_{a1}K_{a2}+K_{a2}K_{e}+K_{a1}K_{e}} \tag{30}$$

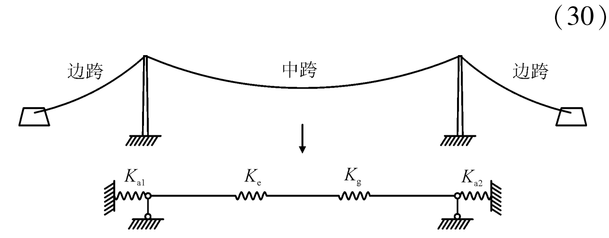


图 6　悬索桥结构刚度串联模型

Fig. 6　Stiffness series model of suspension bridge

根据 Irvine 特征参数 λ 的物理意义，则悬索桥中跨修正后的特征参数 λ_1 为

$$\lambda_1^2=12\frac{K_{e0}}{K_g} \tag{31}$$

通过修正的特征参数 λ_1，利用频率方程式(3)即可求得悬索桥面内对称竖弯的基频。

根据对国内大跨度悬索桥特征参数 λ 的统计，λ^2 值的范围一般在 50 ~ 250 之间。由频率方程式(3)求解可以得到面内对称振动无量纲固有基频 $\bar{\omega}$ 与 λ^2 的关系如图 7 所示。从图中可以明显看出：随着特征参数 λ 的增大，无量纲固有基频 $\bar{\omega}$ 也是单调增大的。由式(30) ~ (31)可知，由于考虑了悬索桥边跨刚度的影响，悬索桥中跨修正的特征参数 λ_1 是减小的。因此，悬索桥的面内对称振动基频也是降低的，边跨等效水平刚度越小，频率降低越多。

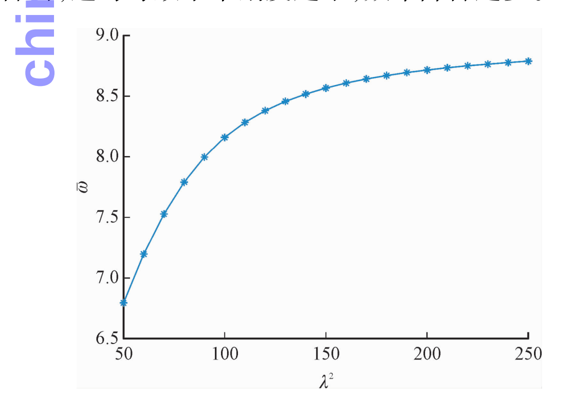


图 7　无量纲固有基频与特征参数的关系

Fig. 7　Relationship between dimensionless fundamental frequency and characteristic parameters

4　规范公式与推荐方法比较验证

本研究选择 3 座典型的大跨悬索桥，包括非对称单跨悬索桥、非对称双跨悬索桥以及对称三跨悬索桥，结构布置图如图 8 ~ 10 所示。悬索桥工程实例相关结构设计参数参见文献[16,28-29]，其结构特性基本上涵盖了大跨悬索桥的结构刚度特性，所选 3 个算例研究具有较普遍的意义。

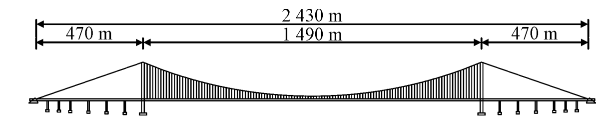


图 8　单跨悬索桥(边跨对称)

Fig. 8　Single span suspension bridge (side span symmetry)

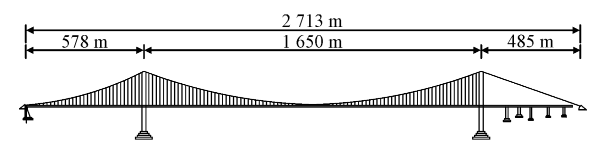


图 9　两跨悬索桥(边跨非对称)

Fig. 9　Two-span suspension bridge (asymmetric side span)

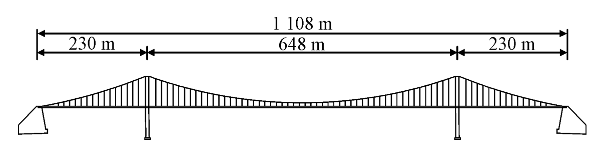


图 10 三跨悬索桥(边跨对称)

Fig. 10　Three-span suspension bridge (side span symmetry)

现行公路桥梁抗风设计规范[17]的对称竖向弯曲频率简化计算公式为

$$f_b=\frac{0.1}{L}\sqrt{\frac{E_cA_c}{m}} \tag{32}$$

式中：f_b 为对称竖弯基频；E_c 为主缆的弹性模量；A_c 为单根主缆截面积；L 为悬索桥主跨跨径；m 为桥面系、主缆与吊杆的单位长度质量。

为了评估规范公式、本研究方法的基频计算精度，将基于精确的有限元方法的计算结果作为参考值。单跨悬索桥和双跨悬索桥采用文献[21-22]的有限元计算结果。该文献建模方法为：采用商业软件 ANSYS 建立三维空间有限元模型，主缆和吊索采用 Link10 索单元，主缆每两个吊点之间离散为一个单元，每根吊索为一个单元；主塔和加劲梁均采用 Beam4 三维梁单元；桥塔底部和主缆端部均使用刚性约束；动力有限元计算考虑索单元几何非线性的影响。根据现场动力特性基频的实测结果，对称竖弯基频的有限元计算结果与实验值完全吻合一致[2,30]，说明了有限元计算结果是可靠的。三跨悬索桥采用同样的建模方法建立的 ANSYS 有限元模型如图 11 所示。

chinaXiv:202212.00121v1

ChinaXiv合作期刊

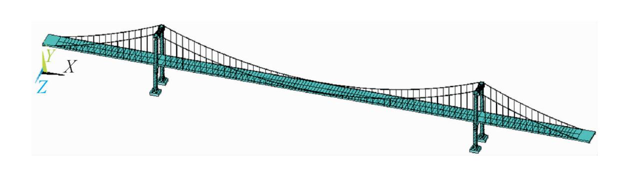


图 11　三跨悬索桥有限元模型

Fig. 11　Finite element model of three-span suspension bridge

采用规范计算公式和有限元计算结果对比如表 1 所示。由表 1 比较结果可以看出,对于单跨悬索桥,规范公式有较高的计算精度,但对于双跨和三跨悬索桥,无论边跨为对称还是非对称结构,误差均较大,对称竖弯基频误差均超过 10%。因此,在采用规范公式进行对称竖弯基频计算时,对于两跨悬索桥和三跨悬索桥可能导致较大的误差,有必要采用更精确的简化计算方法。

表 1　规范公式和有限元方法的自振频率

Tab. 1　Fundamental frequency calculated by the specification formula and the FEM

悬索桥结构	有限元解/Hz	规范公式解/Hz	误差/%
单跨悬索桥	0.123 8	0.127 3	2.8
双跨悬索桥	0.103 6	0.116 1	12.1
三跨悬索桥	0.167 8	0.186 5	10.6

本研究方法的修正特征参数以及面内对称基频计算结果分别如表 2 和表 3 所示。由计算结果可知,对于非对称结构,两边跨的等效水平轴向刚度相差较大,对于双跨悬索桥,等效水平轴向刚度差值达到 2.8 倍。由于考虑了边跨刚度的影响,3 座悬索桥的特征参数 λ 值发生了很大的变化,其量值均出现了明显的下降,变化幅度范围在 1.88 倍 ~3.13 倍之间,其中单跨悬索桥变化相对较小,变化最大的三跨悬索桥。同时由表 2 还可以看出,三跨悬索桥的 λ_1 值最小,单跨悬索桥 λ_1 值最大,λ_1 值大小主要取决于边跨的水平等效轴向刚度。

表 2　边跨刚度与修正的 Irvine 特征参数

Tab. 2　Stiffness of side span and modified Irvine characteristic parameters

悬索桥结构	K_{a1}/(kN·m^{-1})	K_{a2}/(kN·m^{-1})	λ^2	λ_1^2
单跨悬索桥	143 498.7	143 498.7	235.6	125.0
双跨悬索桥	46 033.3	128 997.7	214.6	84.7
三跨悬索桥	54 680.9	54 680.9	187.7	59.9

表 3　本研究方法基频计算结果

Tab. 3　Fundamental frequency calculated by the proposed method

悬索桥结构	有限元解/Hz	本研究方法计算结果/Hz	误差/%
单跨悬索桥	0.123 8	0.121	2.3
双跨悬索桥	0.103 6	0.108	4.6
三跨悬索桥	0.167 8	0.161	4.3

对于对称竖弯基频计算,本研究方法与精确有限元方法计算结果的误差均小于 5%,表明了本研究方法的正确性,并且具有较高的计算精度,能够很好地满足工程应用的计算精度要求。同时本研究选择了典型的 3 类悬索桥作为算例,表明本研究方法具有面内对称基频计算的通用性。但本研究方法忽略了主塔水平抗推刚度对边跨主缆等效水平轴向刚度的影响,引入的其他基本假定也会对基频计算结果产生一定的影响,本研究方法本质上还是一种简化的近似计算方法,因此与精确的有限元分析结果比较存在一定的误差。

5　结　论

针对具有典型非线性力学特点的悬索桥结构,基于理论推导和工程实例验证,可以得到如下结论。

1)本研究考虑大跨悬索桥边跨的刚度影响,提出了对称竖弯基频计算的大跨悬索桥结构刚度模型以及修正的 Irvine 特征参数 λ 的基频计算方法。该方法理论基础为经典的 Irvine 基频计算公式,理论推导严密,概念清楚,计算方法简单,避免了大跨悬索桥初步设计阶段在很多具体结构参数不确定的情况下进行复杂的有限元模型分析。

2)由于考虑边跨刚度的影响,主跨的特征参数 λ 有较大幅度的下降;对称竖弯无量纲固有基频 $\bar{\omega}$ 随特征参数 λ 的增大而单调增大;因此,大跨度悬索桥对称竖弯基频随着边跨刚度的下降而减小。

3)基于典型的 3 类悬索桥面内对称竖弯基频计算,规范公式对于单跨悬索桥对称竖弯基频计算有较高的计算精度,但对于两跨和三跨悬索桥,无论边跨为对称还是非对称结构,误差均较大,基频误差均超过 10%。因此,对于两跨和三跨悬索桥,有必要采用更精确的简化计算方法。

4)本研究提出的对称竖弯基频计算方法精度较高,与有限元计算结果的误差均小于 5%,能够满足

chinaXiv:202212.00121v1

ChinaXiv合作期刊
chinaXiv:202212.00121v1

工程应用的计算精度要求，同时，由于本研究算例涵盖了典型的 3 类悬索桥，也表明了本研究方法具有基频计算的通用性。

参考文献：

[1] REN W X, BLANDFORD G E, HARIK I E. Finite-element model and free vibration response[J]. Journal of bridge engineering, 2004, 9(2): 110-118.

[2] 孙君，李爱群，丁幼亮，等. 润扬大桥悬索桥模态频率-温度的季节相关性研究及其应用[J]. 工程力学，2009，26(9)：50-55.
SUN Jun, LI Aiqun, DING Youliang, et al. Research on correlation of modal frequency and seasonal temperature of Runyang Suspension Bridge[J]. Engineering mechanics, 2009, 26(9): 50-55 (in Chinese).

[3] 张文明，葛耀君. 三塔双主跨悬索桥动力特性精细化分析[J]. 中国公路学报，2014，27(2)：70-76.
ZHANG Wenming, GE Yaojun. Refinement analysis of dynamic characteristics of suspension bridge with triple towers and double main spans[J]. China journal of highway and transport, 2014, 27 (2): 70-76 (in Chinese).

[4] 杨磊，邵飞，江克斌. 新型应急悬索桥动力特性分析[J]. 国防交通工程与技术，2019，17(1)：12-16.
YANG Lei, SHAO Fei, JIANG Kebin. An analysis of the dynamic characteristics of a new-type emergency suspension bridge[J]. Traffic engineering and technology for national defence, 2019, 17 (1): 12-16 (in Chinese).

[5] 郭辉，胡所亭，董振升，等. 大跨度铁路悬索桥模态参数研究[J]. 铁道标准设计，2021，65(11)：42-48.
GUO Hui, HU Suoting, DONG Zhensheng, et al. Study on modal parameters of long-span railway suspension bridges[J]. Railway standard design, 2021, 65(11): 42-48 (in Chinese).

[6] 李翠娟，徐勋，强士中. 超大跨径 CFRP 主缆悬索桥动力特征参数分析[J]. 西南交通大学学报，2014，49(3)：419-424.
LI Cuijuan, XU Xun, QIANG Shizhong. Dynamic responses of super-long-span suspension bridge with CFRP cables under different structural design parameters[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2014, 49(3): 419-424 (in Chinese).

[7] IRVINE H M, CAUGHEY T K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable[J]. Proceedings of the royal society of London series A, 1974, 341: 299-315.

[8] IRVINE H M. Free vibration of inclined cables[J]. Journal of structural division, 1978, 104(2): 343-347.

[9] TRIANTAFYLLOU M S. The dynamics of taut inclined cables[J]. Quarterly journal of mechanics and applied mathematics, 1984, 37 (3): 421-440.

[10] TRIANTAFYLLOU M S, GRINFOGEL L. Natural frequencies and modes of inclined cables[J]. Journal of structural engineering, 1986, 112(1): 139-148.

[11] 李国强，顾明，孙利民. 拉索振动、动力检测与振动控制理论[M]. 北京：科学出版社，2014：16-19.

[12] 李立，李森，廖锦翔. 悬索桥的非线性动力行为及其大振幅扭转振动[J]. 公路交通科技，2001，18(5)：29-31.
LI Li, LI Sen, LIAO Jinxiang. Nonlinear dynamics and large-scale torsional vibration of suspension bridges[J]. Journal of highway and transportation research and development, 2001, 18(5): 29-31 (in Chinese).

[13] 谢献忠，胡霞，彭剑. 多档输电线非线性建模及面内自由振动分析[J]. 应用力学学报，2017，34(6)：1097-1101.
XIE Xianzhong, HU Xia, PENG Jian. Nonlinear modelling and in-plane free vibrations of multi-span transmission lines[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2017, 34(6): 1097-1101 (in Chinese).

[14] 李专干，宋敉淘，曹登庆，等. 一类单塔斜拉桥固有频率及模态的计算与分析[J]. 应用力学学报，2016，33(6)：1038-1044.
LI Zhuangan, SONG Mitao, CAO Dengqing, et al. Calculation and analysis of natural frequencies and mode shapes of a cable-stayed bridge with a single rigid tower[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2016, 33(6): 1038-1044 (in Chinese).

[15] 肖恩源. 论悬挂索的重力刚度[J]. 公路，2000，8(8)：43-49.
XIAO Enyuan. Study on the gravitational stiffness of suspension cable[J]. Highway, 2000, 8(8): 43-49 (in Chinese).

[16] 肖恩源. 悬索桥百年探索与实践[M]. 北京：人民交通出版社股份有限公司，2016.

[17] 中华人民共和国交通运输部. 公路桥梁抗风设计规范：JTG/T 3360－01－2018[S]. 北京：人民交通出版社股份有限公司，2018：51-52.

[18] 盛善定，袁万城，范立础. 悬索桥振动基频的实用估算公式[J]. 东北公路，1996(1)：71-76.
SHENG Shanding, YUAN Wancheng, FAN Lichu. Practical estimation formula of vibration basic frequency of suspension bridge[J]. Northeast highways, 1996(1): 71-76 (in Chinese).

[19] LARSEN A, GIMSING N J. Wind engineering aspects of the east bridge tender project[J]. Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, 1992, 42(1): 1405-1416.

[20] 鞠小华，廖海黎，沈锐利. 对悬索桥对称竖弯基频近似公式的修正[J]. 土木工程学报，2002，35(1)：44-49.
JU Xiaohua, LIAO Haili, SHEN Ruili. Modification on simplified formula of symmetric-vertical natural frequencies for suspension bridges[J]. China civil engineering journal, 2002, 35(1): 44-49 (in Chinese).

[21] 谢官模，王超. 大跨度悬索桥竖向振动基频的实用近似计算公式[J]. 固体力学学报，2008，29(12)：200-203.
XIE Guanmo, WANG Chao. Approximate formula of fundamental vertical frequencies of large-span suspension bridge[J]. Chinese journal of solid mechanics, 2008, 29(12): 200-203 (in Chinese).

[22] 杨国俊，杜永峰，郝宪武，等. 边跨非对称的三跨悬索桥振动基频估算方法[J]. 振动与冲击，2018，37(10)：194-201.
YANG Guojun, DU Yongfeng, HAO Xianwu, et al. Estimation method for the fundamental frequency of a three-span suspension bridge with asymmetric side-spans[J]. Journal of vibration and shock, 2018, 37(10): 194-201 (in Chinese).

ChinaXiv合作期刊
chinaXiv:202212.00121v1

[23] 焦常科,李爱群,王浩. 3 塔悬索桥动力特征参数分析[J]. 公路交通科技,2010,27(4):51-55.
JIAO Changke, LI Aiqun, WANG Hao. Analysis on parameters of dynamic property of triple-pylon suspension bridge[J]. Journal of highway and transportation research and development, 2010, 27(4):51-55(in Chinese).

[24] 王本劲,马如进,陈艾荣. 多塔连跨悬索桥基频估算实用公式[J]. 公路交通科技,2012,29(11):58-62.
WANG Benjin, MA Rujin, CHEN Airong. Practical formula of fundamental frequency estimation for multi-pylon suspension bridge[J]. Journal of highway and transportation research and development,2012,29(11):58-62(in Chinese).

[25] 张超,黄群君,许莉. 考虑主塔刚度影响的三塔自锚式悬索桥竖弯频率计算公式[J]. 长安大学学报(自然科学版),2014,34(6):100-106.
ZHANG Chao, HUANG Qunjun, XU Li. Frequency formulas for vertical vibration of three-tower self-anchored suspension bridge considering tower stiffness influence[J]. Journal of Chang'an University (natural science edition),2014,34(6):100-106(in Chinese).

[26] 郭俊,刘胜红,高嵩,等. 自锚式独塔悬索桥竖向弯曲振动基频估算公式[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版),2019,38(5):27-32.
GUO Jun, LIU Shenghong, GAO Song, et al. Estimation formula of vertical bending vibration fundamental frequency of self-anchored single tower suspension bridge[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (natural sciences),2019,38(5):27-32(in Chinese).

[27] 杨国俊,杜永峰,唐光武,等. 大跨度非对称悬索桥振动基频的参数敏感性分析[J]. 土木工程学报,2018,51(增刊1):72-79.
YANG Guojun, DU Yongfeng, TANG Guangwu, et al. Sensitivity analysis of parameters for vibration frequency of long-span asymmetric suspension bridge[J]. China civil engineering journal,2018,51(S1):72-79(in Chinese).

[28] 王浩,李爱群. ANSYS 大跨度桥梁高等有限元分析与工程实例[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2014.

[29] 李娜,张新越,贺瑞,等. 西堠门大桥动力特性分析与损伤识别方法[J]. 公路,2009(1):31-36.
LI Na, ZHANG Xinyue, HE Rui, et al. Method of dynamic characteristic analysis and damage identification for Xihoumen Bridge[J]. Highway,2009(1):31-36(in Chinese).

[30] 葛耀君. 大跨度悬索桥抗风[M]. 北京:人民交通出版社,2011.

(编辑 李坤璐)

